Devoir Surveillé 1 *$1^{ère}$ S*

Exercice 1 : *Les questions de cet exercice sont indépendantes.*

1) Résoudre l'équation $4x^2 - 5x + 1 = 0$, puis en déduire les solutions de l'équation $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$.

2) Donner le signe de $g(x) = 2x^2 + 2x + 3$ selon les valeurs de x.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-2x^2 + 10x + 5 \geq 3x^2 - 9x + 1$.

Exercice 2 : Déterminer les valeurs du nombre réel m pour lesquelles l'équation $2x^2 + mx + 2 = 0$ n'a pas de solution réelle.

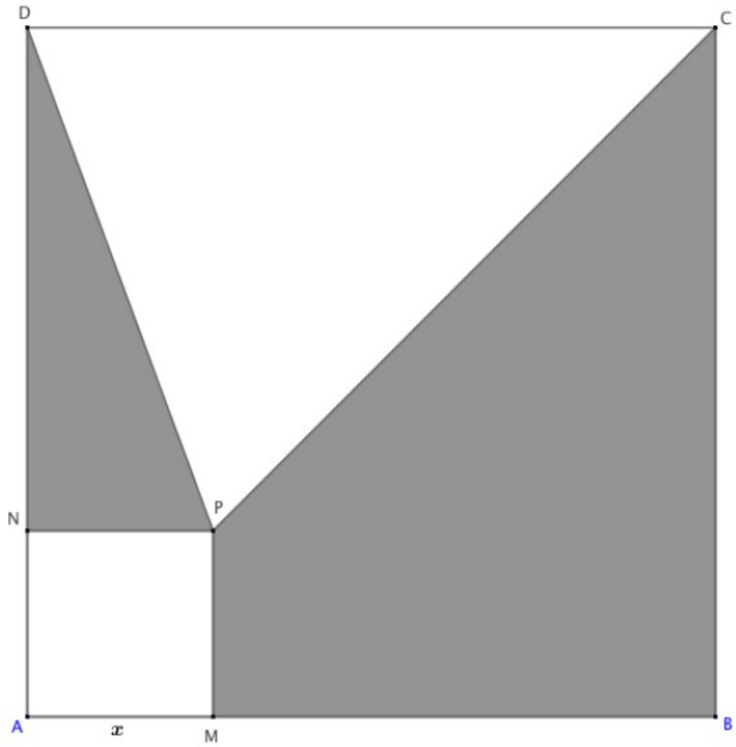
Exercice 3 : ABCD est un carré de 10 cm de côté et AMPN un carré de côté x tel que x appartient à l'intervalle $I = [0 ; 10]$.
On désigne par $S(x)$ l'aire, en cm^2, de la partie grise.

1) Exprimer l'aire du carré AMPN puis celle du triangle CDP en fonction de x.

2) En déduire que pour tout nombre x de I :
$S(x) = - x^2 + 5x + 50$.

3) Pour quelle valeur de x l'aire $S(x)$ est-elle maximale ? Que vaut alors cette aire ?

4) Pour quelles valeurs de x l'aire $S(x)$ est inférieure ou égale à l'aire du carré AMPN?



Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 16x - 36$.

1) Démontrer que pour tout x réel, $f(x) = (x - 2)(4x^2 + 17x + 18)$.

2) Factoriser alors $f(x)$ en l'écrivant comme produit de trois polynômes de degré 1.

Exercice 5 : Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = - 3x^2 + 6x + 1$ et par $g(x) = (x + 2)^2 - 9$.

1) Ecrire f sous la forme canonique et g sous forme développée réduite.

2) Déterminer les extremums des fonctions f et g.

3) Dresser le tableau de variations de f et celui de g.

4) Sans faire de calcul, que peut-on dire de l'équation $- 3x^2 + 6x + 1 = 5$?

5) a) Déterminer à l'aide de la calculatrice les coordonnées des points d'intersection des deux courbes représentatives des fonctions f et g.
b) Vérifier votre résultat par le calcul.

6) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ puis vérifier votre réponse par le calcul.

Correction

Exercice 1 : 1) $4x^2 - 5x + 1 = 0$. $\Delta = 9$ ……. $x_1 = \frac{1}{4}$ et $x_2 = 1$. $S = \{\frac{1}{4} ; 1\}$

On pose $X = x^2$. Donc les solutions de l'équation $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ sont les solutions de $4X^2 - 5X + 1 = 0$.

Donc $X_1 = \frac{1}{4}$ et $X_2 = 1$. Or $x^2 = \frac{1}{4}$ équivaut à $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -\frac{1}{2}$ et $x^2 = 1$ équivaut à $x = 1$ ou $x = -1$.

$\mathbf{S = \{-1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; 1\}}$

2) $g(x) = 2x^2 + 2x + 3$. $\Delta = -20$. Comme Δ est négatif, $g(x)$ est du signe de a pour tout nombre x. Comme $a = 2$, $g(x)$ est positif pour tout nombre réel x.

3) $-2x^2 + 10x + 5 \geq 3x^2 - 9x + 1$ équivaut à $-5x^2 + 19x + 4 \geq 0$. $\Delta = 441$. $x_1 = 4$ et $x_2 = \frac{-1}{5}$.

Le trinôme est donc du signe de a, ici négatif, à l'extérieur des racines. Donc $\mathbf{S = [\frac{-1}{5} ; 4]}$

x	$-\infty$		$\frac{-1}{5}$		4		$+\infty$
Signe de $-5x^2 + 19x + 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 2 : $2x^2 + mx + 2 = 0$. Cette équation n'a pas de solution lorsque Δe st négatif.
$\Delta = m^2 - 4 \times 2 \times 2 = m^2 - 16$. Or $m^2 - 16 < 0$ équivaut à $(m - 4)(m + 4) < 0$.

m	$-\infty$		-4		4		$+\infty$
Signe de $m + 4$		-	0	+		+	
Signe de $m - 4$		-		-	0	+	
Signe de Δ		+	0	-	0	+	

Δ est donc négatif pour m strictement compris entre -4 et 4. **L'équation n'a pas de solution pour $m \in]-4;4[$.**

Exercice 3 : 1) $\text{Aire}_{AMPN} = AM^2 = x^2$ et $\text{Aire}_{CDP} = \frac{DC \times DN}{2} = \frac{10 \times (10 - x)}{2} = 5(10 - x) = 50 - 5x$.

2) Pour tout nombre x de I : $S(x) = \text{Aire}_{ABCD} - \text{Aire}_{AMPN} - \text{Aire}_{CDP} = 100 - x^2 - (50 - 5x) = -x^2 + 5x + 50$.

3) Comme $a = -1$ est négatif, le trinôme $S(x)$ admet un maximum lorsque $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$.

$S(\frac{5}{2}) = -(\frac{5}{2})^2 + 5 \times \frac{5}{2} + 50 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} + 50 = -\frac{25}{4} + \frac{50}{4} + \frac{200}{4} = \frac{225}{4} = 56{,}25$.

L'aire grise est maximale lorsque *x* vaut 2,5 cm et cette aire maximale est alors 56,25 cm².

4) Il faut résoudre $S(x) \leq x^2$, soit $-x^2 + 5x + 50 \leq x^2$, soit $-2x^2 + 5x + 50 \leq 0$.
Etudions le signe de ce nouveau trinôme : $\Delta = 425$. Comme Δ est positif ,Le trinôme a 2 racines et sera du signe de a, donc négatif, à l'extérieur de ses racines :
$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{425}}{-4} = \frac{5 + 5\sqrt{17}}{4} \approx 6{,}4$ et $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{425}}{-4} = \frac{5 - 5\sqrt{17}}{4} \approx -3{,}9$.

Comme $x_2 \notin I$, on obtient le tableau de signes suivant :

x	0		x_1		10
Signe de $-2x^2 + 5x + 50$	50	+	0	-	-100

L'aire $S(x)$ est inférieure ou égale à l'aire du carré AMPN pour $x \in [\frac{5 + 5\sqrt{17}}{4} ; 10]$

Exercice 4 : 1) $(x-2)(4x^2+17x+18) = 4x^3+17x^2+18x-8x^2-34x-36 = 4x^3+9x^2-16x-36 = f(x)$.

2) Factorisons le trinôme $4x^2+17x+18$: $\Delta = 1$ …… $x_1 = \frac{-17-1}{8} = \frac{-9}{4}$ et $x_2 = \frac{-17+1}{8} = -2$.

Donc $4x^2+17x+18 = 4(x+\frac{9}{4})(x+2) = (4x+9)(x+2)$.

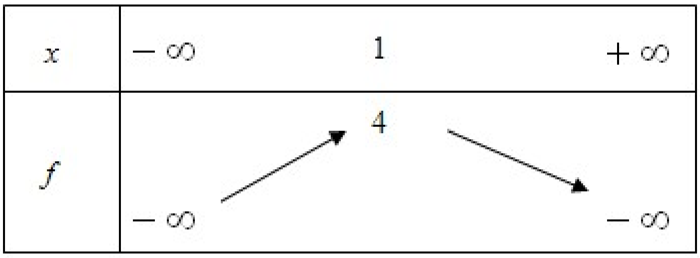
Donc $f(x) = (x-2)(4x+9)(x+2)$.

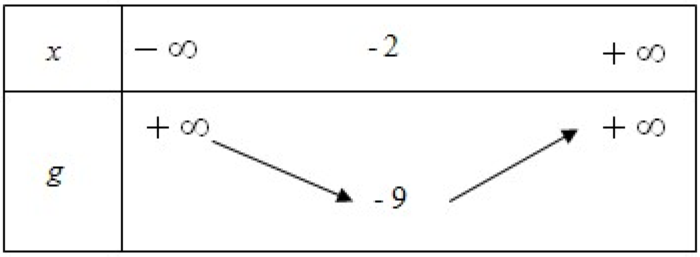
Exercice 5 : 1) $f(x) = -3x^2+6x+1 = -3(x^2-2x)+1 = -3(x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2)+1 = -3((x-1)^2-1)+1$
Donc $f(x) = -3(x-1)^2+3+1 = \mathbf{-3(x-1)^2+4}$.
$g(x) = (x+2)^2-9 = \mathbf{x^2+4x-5}$.

2) La fonction f admet un maximum car a est négatif ($a = -3$).
Ce maximum est égal à 4 et il est atteint pour $x = 1$.

La fonction g admet un minimum car a est positif ($a = 1$).
Ce minimum est égal à -9 et il est atteint pour $x = -2$.

3)





4) $-3x^2+6x+1 = 5$ équivaut à $f(x) = 5$.
Comme f admet un maximum égal à 4, cette équation n'a pas de solution.

5) a) Graphiquement on lit (– 1 ; – 8) et (1,5 ; 3)

b) Il faut résoudre $f(x) = g(x)$ soit $-3x^2+6x+1 = x^2+4x-5$.

Cela équivaut à résoudre : $4x^2-2x-6 = 0$. $\Delta = 100$ …….. $x_1 = \frac{2-10}{8} = -1$ et $x_2 = \frac{2+10}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

$g(-1) = 1-4-5 = -8$ et $g(1{,}5) = 1{,}5^2+4\times 1{,}5-5 = 3{,}25$.
Donc les coordonnées des points d'intersection sont (– 1 ; – 8) et (1,5 ; 3,25)

6) Graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$ signifie que la courbe représentant f est en-dessous celle représentant g. (C_f) est en-dessous (C_g) pour $x \in\ ]-\infty ; -1[\ \cup\ ]1{,}5 ; +\infty[$.

Par le calcul, $f(x) < g(x)$ équivaut à $g(x) - f(x) > 0$, soit $4x^2-2x-6 > 0$.
D'après la question 4b), ce trinôme a deux racines, – 1 et 1,5, et il est du signe de a, donc positif à l'extérieur de ses racines.

x	$-\infty$		-1		$1{,}5$		$+\infty$
Signe de $4x^2-2x-6$		+	0	-	0	+	

S =] – ∞ ; – 1[∪] 1,5 ; + ∞ [.